ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ

областной олимпиады обучающихся профессиональных образовательных учреждений Кемеровской области по дисциплине

МАТЕМАТИКА

Задание 1. Вычислить значение выражения

$$\left(\log_6 2+\log_6 3+2^{\log_2 4}\right)^{\log_5 7}$$

Решение: По свойству логарифмов

$$\left(\log_6 2+\log_6 3+2^{\log_2 4}\right)^{\log_5 7}=(\log_6(2\cdot 3)+4)^{\log_5 7}=5^{\log_5 7}=7.$$

Ответ: 7.

Задание 2. Найдите $f(3)$, если известно, что для любого x имеет место равенство $f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)=\frac{x+3}{x-1}$.

Решение: Обозначим $\mathrm{t}=\frac{\mathrm{x}+1}{2\mathrm{x}-1}$, выразим из приведенного равенства x через t: $\mathrm{x}=\frac{\mathrm{t}+1}{1-3\mathrm{t}}$, тогда

$$\mathrm{f(t)}=\frac{3-5\mathrm{t}}{4\mathrm{t}}$$

Ответ: $\mathrm{f}(3)=-19.$

Задание 3. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (−5; 7). Найдите промежутки убывания функции f(x). В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Решение: Промежутки убывания функции f(x) соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, то есть

интервалу (−2,5; 6,5). Данный интервал содержит следующие целые точки: –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 сумма которых равна 18.
Ответ: 18.

Задание 4. Найдите корни уравнения $\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x}+\left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x}=2$, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi,-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. Пусть $t=\left(\frac{2}{5}\right)^{cosx}$, тогда исходное уравнение можно преобразовать так

$$t+\frac{1}{t}=2 \leftrightarrow \frac{t^2+1-2t}{t}=0 \leftrightarrow t=1 \leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{cosx}=1 \leftrightarrow cosx=0$$
$$\leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\epsilon Z.$$

С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi,-\frac{3\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-\frac{5\pi}{2},-\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $-\frac{5\pi}{2},-\frac{3\pi}{2}$

Задание 5. Найдите корни уравнения:$cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}$. Определите наибольший отрицательный корень.

Решение. $cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2};\ \frac{\pi(x-7)}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ x-7=\pm1+6n;$

$$\left[\begin{array}{l} x=8+6n \\ x=6+6n, n\in Z \end{array}\right.$$

Значениям $n\geq 0$ соответствуют положительные корни.
Если $n=-1$, то x=2 и x=0.
Если $n=-2$, то x=-4 и x=-6.
Значениям $n\leq -3$ соответствуют меньшие значения корней.
Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число -4.

Ответ: -4

Задание 6. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 30 пассажиров, равна 0,93. Вероятность того, что окажется меньше 21 пассажиров, равна 0,5. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 21 до 29.

Решение: Обозначим следующие события:
A — «в автобусе меньше 21 пассажиров», его вероятность равна 0,5.
B — «в автобусе от 21 до 29 пассажиров», вероятность, которую необходимо найти.
Теперь найдём сумму вероятностей A и B. Их сумма — это событие:

A + B — «в автобусе меньше 30 пассажиров».
Действительно, события A и B независимые (несовместные), то есть, они не могут произойти одновременно.
Вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

P(A + B) = P(A) + P(B)

Тогда, используя данные, получаем:

0,93 = 0,5 + P(B)

Таким образом, P(B) = 0,93 – 0,5 = 0,43
Ответ: 0,43

Задание 7. Решите неравенство $\frac{3^{|x^2-2x-1|}-9}{x} \geq 0.$

Решение: Решим неравенство методом интервалов

$$\frac{3^{|x^2-2x-1|}-9}{x} \geq 0. \leftrightarrow \frac{3^{|x^2-2x-1|}-3^2}{x} \geq 0. \leftrightarrow \frac{(3-1)(|x^2-2x-1|-2)}{x} \geq 0 \leftrightarrow$$

$$\frac{|x^2-2x-1|^2-2^2}{x} \geq 0 \leftrightarrow \frac{(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)}{x} \geq 0 \leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3)(x-1)^2}{x} \geq 0$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{c} -1 \leq x < 0 \\ x = 1 \\ x \geq 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{c} -1 \leq x < 0 \\ x = 1 \\ x \geq 3. \end{array}\right.$

Задание 8. Укажите все значения параметра a, при которых система уравнений

$\begin{cases} y = \frac{x+|x|}{x} \\ (x-a)^2 = y + a \end{cases}$, имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a .

Решение:

1. При x>0, y=2, $x^2 - 2ax + a^2 - a - 2$. Уравнение имеет два различных положительных корня $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a+2},$ если $\begin{cases} \frac{D}{4} = a + 2 > 0, \\ a > 0, \\ a^2 - a - 2 > 0 \end{cases} \leftrightarrow$

$$\begin{cases} a > -2, \\ a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} a < -1, \\ a > 2 \end{array}\right. \end{cases} \leftrightarrow a > 2.$$

Тогда исходное уравнение имеет один положительный корень
$x = a + \sqrt{a+2}$, если

$$\left[\begin{cases} D=0,\\ a>0,\\ a^2-a-2<0,\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-1\\ a=2\end{array}\right.\\ a>0\end{cases}\end{cases}\right. \quad -1<a\le 2.$$

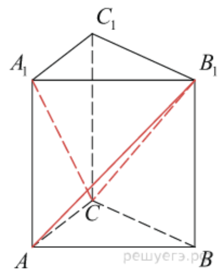
2. При $x<0.\, y=0,\ x^2-2ax+a^2-a=0$. Тогда уравнение не иметь двух отрицательных корней, так как система неравенств $\begin{cases}\frac{D}{4}=a>0,\\ a<0,\\ a^2-a>0.\end{cases}$ решений не имеет.

Уравнение имеет один отрицательный корень $x=a-\sqrt{a}$, если

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{D}{4}=a=0,\\ a<0,\end{cases}\\ a^2-a<0 \ \leftrightarrow 0<a<1.\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=0,\\ a=1\end{array}\right.\\ a<0\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: при $a\in(-1;0]\cup[1;2]$ $\ x=a+\sqrt{a+2}$, y=2; при $a\in(0;1)$ $\ x_1=a+\sqrt{a+2};\ y_1=2;\ x_2=a-\sqrt{a};\ y_2=0$; при $a\in(2;+\infty)$ $\ x_{1,2}=a\pm\sqrt{a+2}\,;\ y_{1,2}=2.$

Задание 9. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки AA_1B_1C правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 4.



Решение. Многогранник, объём которого необходимо найти, является треугольной пирамидой. Из рисунка видно, что его объём равен объёму треугольной призмы, уменьшенному на сумму объёмов двух треугольных пирамид: AB_1BC и $A_1B_1C_1C$. Поскольку призма правильная, объёмы этих пирамид равны. Объём пирамиды равен одной третьей от произведения площади основания на высоту, следовательно, для объёма искомого многогранника имеем:

$$V_{\text{многогр.}}=V_{\text{призмы}}-\ 2\,V_{\text{пир}}=9*4-2*\frac{1}{3}*9*4=36-24=12.$$

Ответ: 12.

Задание 10. В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человек. Их нужно распределить на день на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ у. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 у. е. Как нужно распределить на эти объекты бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько у. е. в этом случае придется заплатить рабочим?

Решение. Пусть на первый объект будет направлено x рабочих, суточная зарплата которых составит $4x^2$. Тогда на второй объект будет направлено (24-x) рабочих -- суточная заработная плата составит $(24-x)^2 = 576 - 48x + x^2$. Тогда в день необходимо платить рабочим $576 - 48x + 5x^2$ у.е. Таким образом, рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = 576 - 48x + 5x^2$, при $0 < x \leq 24$. Найдем ее наименьшее значение. Точка минимума $x_{min} = 4{,}8$. Найдем значение функции в точках 4 и 5. $f(4) = 464, f(5) = 461$.

Таким образом, наименьшее значение функции достигается в точке 5. 5 рабочих необходимо направить на первый объект, 19 рабочих -- на второй объект.

Ответ: 5 рабочих необходимо направить на первый объект, 19 рабочих -- на второй объект, 461 у.е.